

Nicolae Grigore

**MATEMATICĂ
OLIMPIADE ȘI
CONCURSURI ȘCOLARE**

Clasa a VII-a

**Probleme selectate pe unități de învățare
cu rezolvări complete**

Editura NOMINA

CUPRINS

ALGEBRĂ

MULȚIMEA NUMERELOR REALE ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$)	3
I. Mulțimea numerelor întregi ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$)	3
II. Mulțimea numerelor raționale	7
III. Mulțimea numerelor reale	17
IV. Calcul algebric	33
V. Inegalități. Identități	38
VI. Ecuații și inecuații	46

GEOMETRIE

I. Triunghiul. Proprietăți ale triunghiurilor. Triunghiuri asemenea	53
II. Patrulater. Proprietăți	68
III. Arii	87

Olimpiada Națională de Matematică. Etapa locală – 26 februarie 2022	97
--	----

SOLUȚII

Algebră	100
Geometrie	174

ALGEBRĂ

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

$$(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$$

I. Mulțimea numerelor întregi ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$)

1. Să se determine mulțimea $A = \left\{ \overline{abc} \mid \sqrt{\overline{abc5}} + \sqrt{\overline{bc5}} + \sqrt{\overline{c5}} = 105 \right\}$.

Etapa locală, Argeș, 2009

2. Arătați că numărul $\overline{A(A+1)}$ nu este pătrat perfect, $(\forall) A \in \mathbb{N}, A = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$.

Faza pe sector, București, 2009

3. Numerele naturale x, y, z satisfac simultan condițiile:

a) $23 \mid 3x + 13y + 8z$; b) $23 \mid x + y + z$.

Să se arate că: $23 \mid 4x + 18y + 11z$.

Etapa locală, Buzău, 2009

4. Arătați că nu există pătrate perfecte de forma $4k + 2$, oricare ar fi numărul $k \in \mathbb{N}$.

Etapa locală, Caraș-Severin, 2009

5. Fie $\overline{abc} = x^2 + x + 1$, număr natural.

a) Numărul \overline{abc} este par sau impar?

b) Enumerați toate numerele \overline{abc} .

c) Să se calculeze suma acestor numere.

Etapa locală, Harghita, 2009

6. Calculați suma

$$S = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2009^2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2010.$$

Etapa locală, Ilfov, 2009

7. Arătați că pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ expresia $E = (m + 3^m)(m + 1)(m - 1)$ se divide cu 3.

8. Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(n^2 + 6n - 6)$ se divide cu $n + 3$.

Etapa locală, Maramureș, 2009

9. a) Arătați că: $89 = 2^2 + 6^2 + 7^2 = 3^2 + 4^2 + 8^2$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că orice număr de forma $A = 10^{2n} - 10^{2n-1} - 10^{2n-2}$ se poate scrie sub forma $x^2 + y^2 + z^2$, unde $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ și sunt distincte.

Etapa locală, Olt, 2009, prof. Daniel Cojocaru

10. Determinați elementele mulțimii: $M = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{5n-1}{n+1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

Etapa locală, Sălaj, 2009

42. Aflați numărul întreg n , știind că fracția $\frac{5n-1}{4n+9}$ și inversa sa sunt simultan numere întregi.

Etapa locală, Prahova, 2016

43. Demonstrați că media aritmetică a primelor k numere naturale pare consecutive și cea a primelor k numere naturale impare consecutive sunt numere naturale consecutive, unde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Etapa locală, Iași, 2015

44. Se consideră numărul $a_n = \underbrace{18777\dots77889}_{\text{de } n \text{ ori}}$, cu n număr natural, și c_n câtul împărțirii numărului a_n la 13.

a) Să se arate că a_n se divide cu 13 pentru oricare n .

b) Să se determine n pentru care $s(a_n) = 2s(c_n)$, unde $s(m)$ reprezintă suma cifrelor numărului m .

Etapa locală, Gorj, 2016

45. Determinați numerele naturale m și n , știind că m este prim și

$$\left| 1 - \left| \left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right| \right| = (-1)^m \cdot \frac{179}{32}.$$

Etapa locală, Vrancea, 2019

46. Să se determine numerele naturale a și b , $a < b$, pentru care are loc relația:

$$3 \cdot [a, b] + 5 \cdot (a, b) = 123.$$

(S-a notat $[a, b] = \text{c.m.m.m.c. al numerelor naturale } a \text{ și } b$, iar $(a, b) = \text{c.m.m.d.c. al numerelor naturale } a \text{ și } b$.)

Etapa locală, Galați, 2020, prof. Vasile Popa

47. a) Există numere naturale de forma \overline{abcd} cu proprietatea $\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2 = 2020$?

b) Determinați numerele naturale de forma \overline{abcd} cu proprietatea $\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 = 2020$.

Etapa locală, București, 2020

II. Mulțimea numerelor raționale

1. Fie șirul de numere raționale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2007}$, astfel încât $a_1 = 1 + 1^{-1}$, $a_2 = 1 + 2^{-1}$, $a_3 = 1 + 3^{-1}$, ..., $a_{2007} = 1 + 2007^{-1}$.

a) Comparați a_{75} cu a_{74} .

b) Arătați că $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2007} \in \mathbb{N}$.

c) Aflați $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 2005$, astfel încât $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \in \mathbb{N}$.

Etapa locală, Brașov, 2008

2. Se dau numerele raționale: $A = \frac{1}{a+b_1} + \frac{2}{a+2b_2} + \frac{3}{a+3b_3} + \dots + \frac{n}{a+nb_n}$;

b) Se dau numerele $a = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{4}{8 \cdot 12} + \frac{5}{12 \cdot 17} + \frac{6}{17 \cdot 23} + \frac{7}{23 \cdot 30}$ și $b = 3 + 8 + 13 + \dots + 10018$. Calculați partea întregă a numărului $\sqrt{15a + \frac{b}{1002}}$.

Etapa locală, Constanța, 2019

141. a) Arătați că pentru orice $x \in \mathbb{N}$ care nu este multiplu de 3, restul împărțirii lui x^2 la 3 este egal cu 1.

b) Demonstrați că $a = \sqrt{2018^{2020} + 2020^{2018} + 2019}$ este irațional.

Etapa locală, Constanța, 2019

142. Se dau numerele $a = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \dots + \frac{20}{192 \cdot 212}$ și $b = 1 + 6 + 11 + 16 + \dots + 2016$. Arătați că numărul $\sqrt{2012 \cdot a + \frac{b}{2017}} - 1$ este număr irațional.

Etapa locală, Covasna, 2019

143. Se consideră expresia $E(n) = \sqrt{(10^n - 2019)^2} - \sqrt{(2018 - 10^n)^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Determinați valorile expresiei $E(n)$.

b) Aflați numerele raționale a și b pentru care $E(n) = \frac{a}{\sqrt{2} - 1} + \frac{b}{\sqrt{2} + 1}$, unde $n \geq 4$.

Etapa locală, Sibiu, 2019

144. a) Determinați numerele naturale de forma \overline{ab} , scrise în baza zece, astfel încât $a + b = 10$ și $[\sqrt{ab}] = 6$, unde $[x]$ reprezintă partea întregă a numărului real x .

b) Determinați numerele naturale de forma \overline{abc} , scrise în baza zece cu cifre distincte, astfel încât $a \cdot b = c$ și $n = \sqrt{\overline{abc} + \overline{cab} + \overline{bca} - (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}) - (a + b + c)}$ să fie număr natural.

Etapa locală, Suceava, 2019

145. Determinați numerele naturale \overline{xy} și \overline{abcd} , știind că $\sqrt{2019 - a\sqrt{bcd}} = a^2 \cdot \sqrt{xy}$.

Etapa locală, București, 2019, prof. Traian Preda

146. a) Determinați cifrele a și b , astfel încât $\sqrt{b7b} = \overline{ab}$. (Numerele sunt scrise în baza zece.)

b) Dacă $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$ și $xy + yz + zx = 2019$, arătați că:

$$\sqrt{(x^2 + 2019)(y^2 + 2019)(z^2 + 2019)} \in \mathbb{Q}.$$

Etapa locală, Dolj, 2019

147. Să se afle perechile de numere naturale (p, q) pentru care $\sqrt{p \cdot q} - q = 2019$.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2019

148. a) Arătați că adăugând 1 la produsul a patru numere întregi consecutive se obține un pătrat perfect.

b) Demonstrați că $\sqrt{2020 \cdot 2021 \cdot 2022 \cdot 2023 + 1} \in \mathbb{N}$.

Etapa locală, Cluj, 2020, prof. Cristian Petru Pop

149. Se consideră expresia $E = \frac{\sqrt{19+8\sqrt{3}} + \sqrt{8-2\sqrt{15}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}}{x+3}$, $x \neq -3$. Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care expresia este un număr întreg.

Etapa locală, Cluj, 2020, prof. Rodica Lădar

150. Fie $x = (\sqrt{2019} + \sqrt{2020})(a \cdot \sqrt{2019} + b \cdot \sqrt{2020})$, $a, b \in \mathbb{Z}_+$.

a) Dacă x este număr rațional, calculați $a^{2019} + b^{2019}$ și $a^{2020} - b^{2020}$.

b) Dacă $x = -1$, determinați valorile lui a și b .

Etapa locală, Galați, 2020, prof. Veronica Grigore (prelucrare)

151. a) Aflați numerele întregi x , diferite de -1 , astfel încât $\sqrt{\frac{x-2010}{x+1}}$ să fie număr întreg.

GM nr. 5/2011

b) Fie $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2020}$ numere naturale impare. Arătați că numărul:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{2020}^2} - 1$$
 este irațional.

Etapa locală, Argeș, 2020

152. Arătați că $\sqrt{2^{2018} + 3^{2020} + 4^{2022}}$ nu este număr rațional.

Etapa locală, Bacău, 2020

153. Câte numere de forma \sqrt{n} , $n \in \mathbb{N}$, care nu sunt raționale, există între numerele

$$a = \sqrt{4 \cdot \underbrace{100 \dots 01^2}_{9 \text{ zerouri}}} \text{ și } b = \sqrt{2 \underbrace{00 \dots 03}_{9 \text{ zerouri}} \cdot 2 \underbrace{00 \dots 03}_{9 \text{ zerouri}}}.$$

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2020

154. Fie $A = \sqrt{1} + \sqrt{1+3+5} + \sqrt{1+3+5+7+9} + \dots + \sqrt{1+3+5+\dots+8077}$. Arătați că numărul \sqrt{A} este număr natural.

Etapa locală, Iași, 2020

155. a) Calculați partea întreagă și partea fracționară a numărului $a = \sqrt{8+2\sqrt{7}}$.

b) Dacă $A = \sqrt{\sqrt{7}+7 + \sqrt{\sqrt{7}+7 + \sqrt{\sqrt{7}+7 + \sqrt{\sqrt{7}+7 + \sqrt{8+2\sqrt{7}}}}}} - 1$, arătați că A^2 este număr natural.

Etapa locală, Dolj, 2020, prof. Nicolae Ivășchescu

IV. Calcul algebric

1. Fie $E(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 153}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că există cel puțin trei valori întregi pentru x astfel încât $E(x) \in \mathbb{N}$.

b) Arătați că există o infinitate de numere raționale x , astfel încât $E(x) \in \mathbb{Q}$.

Etapa locală, Arad, 2008

2. Calculați $\left[(5+2\sqrt{6})^{2008} + \frac{1}{(5-2\sqrt{6})^{2008}} \right] \cdot \frac{(10-4\sqrt{6})^{2008}}{2^{2009}}$.

Etapa locală, Dâmbovița, 2008, prof. Elena Boghe

67. Demonstrați că, dacă x, y și z sunt numere reale pozitive, astfel încât $x + y + z = 1344$, atunci $\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)} \leq 2016$.

Etapa locală, Bihor, 2016

68. Arătați că $0,9 < \frac{3}{2^2} + \frac{5}{6^2} + \frac{7}{12^2} + \dots + \frac{2013}{1013042^2} < 1$.

Etapa locală, Mehedinți, 2016

69. Numerele naturale a și b verifică egalitatea $\frac{2020b}{b^2 - 2019} = \frac{2020a + 26260}{a}$.

a) Arătați că $0 < b - \frac{2019}{b} < 1$.

b) Determinați numerele a și b .

Etapa locală, Sibiu, 2019

70. a) Arătați că $\sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 1}{2}} > n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că $\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 1}{2}} > \frac{n(n+2)}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Etapa locală, Sălaj, 2019, Supliment G.M.

71. Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, iar m și n divizori ai lui a , cu $m < n$. Arătați că $a \cdot (n - m) > m^2$.

Etapa locală, Bihor, 2020

72. Fie numerele întregi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2022}$, astfel încât $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2022}\} = \{1, 2, 3, \dots, 2022\}$. Arătați că printre numerele $|x_1 - 1|, |x_2 - 2|, |x_3 - 3|, \dots, |x_{2022} - 2022|$ există cel puțin două numere egale.

Etapa locală, Bihor, 2020

73. Dacă $a = \frac{1}{63} + \frac{2}{62} + \frac{3}{61} + \dots + \frac{63}{1}$ și $b = \frac{1}{64} + \frac{2}{63} + \frac{3}{62} + \dots + \frac{64}{1}$, arătați că $b - a > 3$.

Etapa locală, Argeș, 2020

74. Arătați că $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{2020}} < \frac{5}{4}$.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2020

75. Se consideră numerele raționale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022}$, astfel încât $a_1 = 1 + \frac{1}{1}$, $a_2 = 1 + \frac{1}{2}$,

$a_3 = 1 + \frac{1}{3}$, ..., $a_{2020} = 1 + \frac{1}{2020}$.

a) Demonstrați că $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2022}$ este număr natural.

b) Demonstrați că $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2019} - a_{2022} < \frac{1010}{1011}$.

Etapa locală, Hunedoara, 2020

VI. Ecuații și inecuații

1. Determinați numerele naturale x, y, z pentru care $x \leq y \leq z$ și $2006^x + 2007^y = 2008^z$.
Etapa locală, Cluj, 2008

2. Determinați numerele raționale x și y astfel încât:

$$\frac{x + 2008}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \cdot (y - 2008).$$

Etapa locală, Dolj, 2008

3. a) Câte soluții întregi are inecuația $|x| \leq 2008$?

b) Câte soluții naturale are ecuația $x + y + z = 2008$?

Etapa locală, Mehedinți, 2008

4. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $xy + x + y = 1$.

Etapa locală, Sălaj, 2008

5. Determinați numerele raționale x, y, z care satisfac simultan relațiile:

$$y + z = |x| - 2; \quad z + x = |y| + 1; \quad x + y = |z| + 3.$$

Concursul interjudețean „TMMATE”, 2008, prof. Gheorghe Silberberg

6. Aflați $x \in \mathbb{N}$ din egalitatea $\frac{x^2 + 1}{x + 1} + \frac{x^2 + 2}{x + 2} + \frac{x^2 + 3}{x + 3} + \dots + \frac{x^2 + 2007}{x + 2007} = 2007$.

Concursul interjudețean „Discipolii lui Lazăr”, Traian Cotfas

7. Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația:

$$\left\{ \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^{-2} - 1 \right] : (0,4)^{-1} + \frac{1}{2} \right\} : \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{-2} \cdot 6^{-1} \right] = 0,5 \cdot |x + 1| - 3.$$

Etapa locală, Alba, 2009

8. Să se rezolve în mulțimea \mathbb{Z} ecuația: $2xy - 7y = 5x + 3$.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2009

9. Determinați numerele $x, y \in \mathbb{N}$ care verifică relația: $2xy + x + y = 85$.

Etapa locală, Brăila, 2009

10. Aflați $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x^2 \sqrt{(y-1)^2} = 2009$.

Etapa locală, București, 2009

11. Arătați că ecuația $x^2 + 6y^2 = 2807$ nu are soluții în \mathbb{Z} .

Etapa locală, București, 2009

12. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ știind că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Etapa locală, Buzău, 2009

13. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația: $2[x] + 4 = 3x$ ($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x).

Etapa locală, Călărași, 2009

14. Rezolvați în \mathbb{Z} ecuația $\frac{2}{x} + \frac{5}{3y} = -1$.

Etapa locală, Călărași, 2009

117. În triunghiul isoscel ABC, cu $[AB] = [AC]$, se consideră bisectoarele (AD, respectiv (CE, cu $D \in (BC)$, $E \in (AB)$ și punctul F, mijlocul lui (AC), astfel încât $EF \perp AC$.

a) Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

b) Arătați că triunghiul ABP este isoscel, unde $AD \cap EF = \{P\}$.

Etapa locală, Alba, 2016, G.M. 9/2015

118. Fie ABC un triunghi echilateral, M mijlocul laturii [BC] și $D \in (AM)$ astfel încât $AM + MD = AB$. Să se determine măsura unghiului DBM.

Etapa locală, Gorj, 2016

119. Se consideră un triunghi ABC și punctele M, N, P pe laturile [BC], [AC], respectiv [AB], astfel încât $\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$. Dacă E este mijlocul lui [NP] și F mijlocul lui [BC], demonstrați că EF este paralelă cu AM și $EF = \frac{1}{2} \cdot AM$.

Etapa locală, Mehedinți, 2016

120. Triunghiul ABC este isoscel ($AB = AC$) cu $m(\sphericalangle A) = 36^\circ$, BM este bisectoarea $\sphericalangle ABC$, $M \in (AC)$, și BN bisectoarea $\sphericalangle ABM$, $N \in [AM]$. Demonstrați că:

a) $MC = AN$;

b) $\left(\frac{AN}{NM}\right)^2 = \frac{AN}{MN} + 1$.

Etapa locală, București, 2019, prof. Traian Preda

121. Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC și fie D piciorul înălțimii din A pe BC. Se duce $DE \perp AC$, $E \in AC$, și fie F un punct pe segmentul (DE), astfel încât $AF \perp BE$. Arătați că $\frac{DF}{EF} = \frac{CD}{BD}$.

Etapa locală, Constanța, 2019

122. În triunghiul ABC se aleg punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{AC}$.

Dacă punctul P este mijlocul laturii [AB] și punctul Q este mijlocul segmentului [MN], demonstrați că $\frac{AM}{AB} + 2 \cdot \frac{PQ}{BC} = 1$.

Etapa locală, Sibiu, 2019, prof. Cătălin Cristea, G.M. 10/2018

123. În triunghiul ascuțitunghic ABC, $AE \perp BC$, $E \in BC$ și $M \in BC$, astfel încât $C \in (BM)$. Bisectoarea unghiului ACM intersectează dreapta AE în punctul D.

a) Arătați că $m(\sphericalangle ADC) \neq m(\sphericalangle ACB)$.

b) Știind că $(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ADC) = x^\circ$ și că ΔABC este isoscel, aflați x° .

Etapa locală, Vâlcea, 2019

124. Fie triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$, și $m(\sphericalangle BAC) > 60^\circ$. Construim punctul $D \in (BC)$, astfel încât $BD = AC$. Demonstrați că semidreapta (AD și mediatoarea segmentului [CD] se intersectează pe bisectoarea unghiului exterior ΔABC cu vârful în C.

Etapa locală, Vrancea, 2019

125. Punctul D este în interiorul triunghiului ABC, astfel încât unghiurile BAC și BDC sunt suplementare, (BE este bisectoarea \sphericalangle ABD și (CE este bisectoarea \sphericalangle ACD. Aflați $m(\sphericalangle$ BEC).

Etapa locală, Bihor, 2020

126. Punctul O este intersecția mediatoarelor laturilor triunghiului ABC. Fie punctul D intersecția dreptei AO cu segmentul BC. Știind că $OD = BD = \frac{1}{3} \cdot BC$, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Etapa locală, Galați, 2020, prof. Veronica Grigore

127. Considerăm un cerc de centru O și triunghiul ABC înscris în cerc, astfel încât $\widehat{AC} = 120^\circ$, $AD \perp BC$, D situat pe segmentul BC, O situat pe segmentul AD, $DE \perp \perp AC$, $E \in AC$. Dacă M este mijlocul segmentului DE, arătați că $AM \perp BE$.

Etapa locală, Argeș, 2020, G.M. 12/2019 (enuț modificat)

128. În triunghiul ABC ascuțitunghic cu $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$ se consideră $BD \perp AC$ ($D \in AC$), $CE \perp AB$ ($E \in AB$) și M mijlocul laturii BC. Arătați că triunghiul DEM este echilateral.

Etapa locală, Bacău, Hunedoara, 2020, G.M. 10/2019

129. Fie $\mathcal{C}(O, r)$ și A un punct exterior cercului astfel încât unghiul format de tangentele la cerc AM și AN ($M, N \in \mathcal{C}(O, r)$), are măsura de 30° . Dacă P este mijlocul segmentului AO, arătați că triunghiul MNP este echilateral.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2020

130. Se consideră un triunghi ABC și punctele M pe latura AB, N pe latura AC. Dacă triunghiul AMN este echilateral și $MB = AC$, arătați că triunghiul BNC este isoscel.

Etapa locală, Iași, 2020, prof. Dan Nedeianu, G.M. 9/2019

131. Fie AB un diametru al cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Prin punctul P, mijlocul lui [OA], construim perpendiculara pe AB care intersectează cercul în C și D. Tangenta în C la cerc intersectează dreapta AB în M. Arătați că A este mijlocul segmentului [OM].

Etapa locală, București, 2020, prof. Vasile Scurtu, G.M. 12/2019

II. Patrulater. Proprietăți

1. Fie ABCD trapez, cu $AB \parallel CD$, $m(\sphericalangle A) < 90^\circ$, $m(\sphericalangle B) < 90^\circ$, $DN \perp AB$, $N \in (AB)$, $DC = DN$, $AP \perp AB$ astfel încât P și D să fie de o parte și de alta a dreptei AB și $AB = AP$, iar $\{M\} = AD \cap BC$. Arătați că M, N, P sunt coliniare.

Etapa locală, Alba, 2008

2. Dreptunghiul ABCD are $AB = 2 \cdot BC = 2a$. Semidreptele (Ax și (Ay intersectează pe CD în punctele E și respectiv F, astfel încât $m(\sphericalangle BAE) = 30^\circ$ și $m(\sphericalangle DAF) = 30^\circ$. Semidreapta (Fz este perpendiculară pe AE în punctul M și intersectează pe AB în N. Arătați că:

- a) $E \in (CD)$; b) $\triangle ADM$ este echilateral; c) ANEF este romb.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2008, prof. Ioan Tripa

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – 26 februarie 2022

1. Numărul $N = \frac{2}{\frac{2}{5}} + \frac{5}{2}$ este egal cu:
A 5,8 **B** 0,4 **C** 1 **D** 5,2 **E** 2
2. Produsul soluțiilor ecuației $\frac{x^2+3}{3} + \frac{x^2+7}{5} + \frac{x^2+19}{11} = 6$ este egal cu:
A 5 **B** 3 **C** -3 **D** -5 **E** 11
3. Suma pătratelor soluțiilor ecuației $||x| - 3| = 2$ este egală cu:
A 1 **B** 2 **C** 26 **D** 50 **E** 52
4. Numărul elementelor iraționale ale mulțimii $A = \{\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{300}\}$ este:
A 284 **B** 282 **C** 18 **D** 17 **E** 283
5. Se consideră numărul $A = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5 \cdot 7}} + \dots + \frac{\sqrt{243}-\sqrt{241}}{\sqrt{241 \cdot 243}}$. Atunci:
A $0 < A < 1$ **B** $A \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ **C** $A > 2$ **D** $1 < A < 2$ **E** $A \in \mathbb{N}$
6. Se consideră rombul $ABCD$, cu $AB = 2\sqrt{3}$ cm. Fie M și N mijloacele laturilor AB și CD . Dacă dreptele MN și AB sunt perpendiculare, atunci aria rombului $ABCD$ este egală cu:
A 3 cm^2 **B** 12 cm^2 **C** $\sqrt{3} \text{ cm}^2$ **D** 6 cm^2 **E** $6\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- 7+8. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și punctele M, N , astfel încât M este mijlocul laturii CD , iar N este mijlocul segmentului AM . Dacă $AB = 4$ cm, iar dreptele AM și BN sunt perpendiculare, atunci:
A $\sphericalangle DAM = 35^\circ$ **B** $\sphericalangle DAM = 45^\circ$ **C** $\sphericalangle DAM = 30^\circ$ **D** $\sphericalangle DAM = 60^\circ$ **E** $\sphericalangle DAM = 50^\circ$
A $CN = 4\sqrt{3}$ cm **B** $CN = 4$ cm **C** $CN = 2\sqrt{3}$ cm **D** $CN = 6$ cm **E** $CN = 4\sqrt{2}$ cm
9. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 4$ cm și $\sphericalangle A = 60^\circ$. Dacă bisectoarele unghiurilor A și C nu sunt paralele, atunci aria lui $ABCD$ este egală cu:
A $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$ **B** 16 cm^2 **C** $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$ **D** 24 cm^2 **E** $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$
10. Numerele reale nenule x, y, z verifică relațiile $\frac{xy}{z} = \sqrt{6-4\sqrt{2}}$, $\frac{yz}{x} = 2 + \sqrt{2}$, $\frac{zx}{y} = 3$.
 Suma $S = x^2 + y^2 + z^2$ are valoarea egală cu:
A 20 **B** 1 **C** 9 **D** 14 **E** 15

11. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle BAC$. Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , M este punctul în care bisectoarea unghiului ABC intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului, $BM \cap AC = \{N\}$, iar $\sphericalangle BOM = 144^\circ$, atunci unghiul ANB are măsura de:

- A 120° B 108° C 36° D 72° E 150°

12. Fie numărul de două cifre xy . Rezultatul calculului $|\sqrt{96 - \overline{xy}}| + |\overline{xy} - \sqrt{15000}|$ este egal cu:

- A $54\sqrt{6}$ B \overline{xy} C $2\overline{xy}$ D $46\sqrt{6}$ E $2\overline{xy} + 54\sqrt{6}$

13. Dacă a și b sunt două numere reale astfel încât $-3 \leq a \leq 2$ și $2b = a - 4$, atunci expresia $\sqrt{2a^2 + 10b^2 - 8a + 20b + 18} + 3\sqrt{2b^2 - 2a^2 + 80b - 16a + 128}$ este egală cu:

- A $6\sqrt{2}$ B $3\sqrt{2}(a-1)$ C $9\sqrt{2}$ D $9\sqrt{3}$ E $6\sqrt{3}$

14. Dacă \overline{xy} este un număr de două cifre, iar $N = \left[\sqrt{159 + \overline{xy}} \right]$ (unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a), atunci valorile distincte ale lui N sunt în număr de:

- A 2 B 3 C 4 D 5 E 1

15. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ ($AB \parallel CD$), cu $AB = 25$ cm, $CD = 11$ cm și $\sphericalangle B = 45^\circ$. Aria triunghiului BCD este egală cu:

- A 98 cm^2 B 154 cm^2 C 252 cm^2 D 175 cm^2 E 77 cm^2

16. Pe un cerc de centru O se consideră punctele diametral opuse A și B . Mediatoarea segmentului OB intersectează cercul în punctele C și D . Dacă patrulaterul $AMCD$ este inscriptibil, atunci măsura unghiului AMC este egală cu:

- A 150° B 120° C 130° D 60° E 75°

17+18. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$), cu $AB = 2CD = 24$ cm și $\sphericalangle B = 45^\circ$. Punctele E și F sunt mijloacele diagonalelor AC , respectiv BD , punctul G este intersecția dreptelor AF și DE , iar S este aria patrulaterului $CDEF$. Atunci:

- A $S = 27 \text{ cm}^2$ B $S = 51 \text{ cm}^2$ C $S = 21 \text{ cm}^2$ D $S = 81 \text{ cm}^2$ E $S = 18 \text{ cm}^2$

- A $EG = 3\sqrt{2}$ cm B $EG = 2\sqrt{2}$ cm C $EG = 4$ cm D $EG = 6$ cm E $EG = \sqrt{2}$ cm

19. Numărul $S = \left[\sqrt{\sqrt{1 \cdot 2}} \right] + \left[\sqrt{\sqrt{2 \cdot 3}} \right] + \dots + \left[\sqrt{\sqrt{100 \cdot 101}} \right]$ unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a este egal cu:

- A 525 B 615 C 5050 D 625 E 825

20. Numerele reale x și y verifică simultan relațiile: $\left\{ \frac{2x+y}{8} \right\} + \left[\frac{x+2y}{3} \right] = \frac{1}{4}$ și

$\left\{ \frac{x+2y}{3} \right\} + \left[\frac{2x+y}{8} \right] = \frac{5}{3}$ ($\{a\}$ și $[a]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a). Numărul $z = x - y$ este egal cu:

- A $\frac{1}{4}$ B -4 C 0 D 8 E $\frac{1}{3}$

7. $\sqrt{abc - \sqrt{c}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{abc - \sqrt{c}} \in \mathbb{N}$ și $\overline{abc - \sqrt{c}} = k^2$. Cum $\overline{abc - \sqrt{c}} \in \mathbb{N} \Rightarrow c$ cifră pătrat perfect $\Rightarrow c \in \{0, 1, 4, 9\}$. Dacă $c = 0 \Rightarrow \overline{ab0}$ pătrat perfect, imposibil pentru că $b \neq 0$. Dacă $c = 1 \Rightarrow \overline{ab1} - 1 = \overline{ab0} \Rightarrow 400$ și 900 pătrate perfecte. Dacă $c = 4 \Rightarrow \overline{ab4} - 2 = \overline{ab2} =$ pătrat perfect, imposibil. Dacă $c = 9 \Rightarrow \overline{ab9} - 3 = \overline{ab6} =$ pătrat perfect $\Rightarrow 256, 576, 676$. Deci $A = \{401, 901, 259, 579, 679\}$.

8. a) Din $\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{a} + b} \Rightarrow a - \sqrt{b} = \sqrt{a} + b \Rightarrow a - b - \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \Rightarrow \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 - \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \Rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 0 \Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b} - 1) = 0$. Cum $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = 1$; b) Cum $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1 \Rightarrow \sqrt{a} = 1 + \sqrt{b}$. Cum $x = \sqrt{\sqrt{a} + b} \Rightarrow x = \sqrt{1 + \sqrt{b} + b} = \sqrt{\left(\sqrt{b} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

9. $\sqrt{10 - \sqrt{n}} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 10 - \sqrt{n} \in \mathbb{N}$ și $10 - \sqrt{n} = k^2 \Rightarrow n \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$; $10 - \sqrt{n} = k^2 \Rightarrow n \in \{1, 36, 81, 100\}$.

10. a) 50625; 10000; 1296; b) Fie x, y, z cele trei numere scrise inițial; produsul lor este $x \cdot y \cdot z$; la pasul următor scrie: $\sqrt{yz}; \sqrt{xz}; \sqrt{xy}$; produsul lor este tot $x \cdot y \cdot z$ (este invariant). Același lucru se întâmplă și la pașii următori. Dar $256 \cdot 6561 \cdot 390625 \neq 3000 \cdot 2009 \cdot 7175 \Rightarrow$ nu este posibil.

11. „ \Rightarrow ” Presupunem prin absurd că numărul $a \cdot b$ este impar. Atunci a și b sunt numere impare, deci $a^2 + b^2$ este par, de forma $4k + 2$. Cum $a^2 + b^2 = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$. Observăm că m, n au aceeași paritate $\Rightarrow a^2 + b^2$ este multiplu de 4, imposibil. Dacă m, n au parități diferite $\Rightarrow a^2 + b^2$ este impar, contradicție;

„ \Leftarrow ” Presupunem că $a \cdot b$ este număr par. Dacă a și b sunt pare $\Rightarrow a^2 + b^2 = 4s$. Dacă doar unul dintre a, b este par $\Rightarrow a^2 + b^2 = 2r + 1$. În primul caz, $a^2 + b^2 = 4s = (s + 1)^2 - (s - 1)^2$. În al doilea caz, $a^2 + b^2 = 2r + 1 = (r + 1)^2 - r^2$. Deci în ambele cazuri, $a^2 + b^2$ s-a scris ca diferență de pătrate.

12. a) $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 2n + n + 2 = n^2 + 3n + 2$; b) $s = \frac{1}{3} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{6} = \frac{2 + 3n + n^2}{6} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{6} \in \mathbb{N} \Rightarrow 6 \mid (n + 1)(n + 2) \Rightarrow 2 \mid (n + 1)(n + 2)$ și $3 \mid (n + 1)(n + 2)$. Luăm $n = 3k + 1$ sau $n = 3k + 2, k \in \mathbb{N}$.

13. $\frac{3a + 4b + 5c}{2a + 3b} = \frac{3b + 4c + 5a}{2b + 3c} = \frac{3c + 4a + 5b}{2c + 3a} = \frac{12(a + b + c)}{5(a + b + c)} = \frac{12}{5}$; $A = \sqrt{\frac{1}{5} \left(\frac{12}{5} + \frac{12}{5} + \frac{12}{5} \right)} = \frac{6}{5}$; $[A] = 1$.

14. a) $\frac{a + 2b}{2a + 3b + 4c} = \frac{b + 2c}{2b + 3c + 4a} = \frac{c + 2a}{2c + 3a + 4b} = \frac{3(a + b + c)}{9(a + b + c)} = \frac{1}{3}$; $\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{3}} = 1 \in$

$\in \mathbb{N}$; b) $\frac{a + 2b}{2a + 3b + 4c} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2a + 3b + 4c = 3(a + 2b)$; $\frac{\sqrt{2ab}}{2a + 3b + 4c} \leq \frac{a + 2b}{3(a + 2b)} = \frac{1}{6}$. Analog:

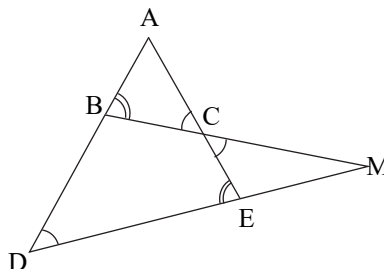
GEOMETRIE

I. Triunghiul. Proprietăți ale triunghiurilor. Triunghiuri asemenea

1. a) Vom găsi triunghiurile asemenea, folosind ipoteza problemei și cazurile de asemănare a triunghiurilor.

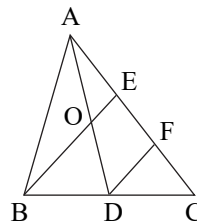
În $\triangle ABC$ și $\triangle AED$ avem: $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle CAB$ (unghi comun); $\frac{AB}{AE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\frac{AC}{AD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$

L.U.L
 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{1}{2} \Rightarrow DE = 2 \cdot BC = 12 \text{ cm}$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AED$, $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ADE$;



b) În $\triangle MCE$ și $\triangle MDB$ avem: $\sphericalangle DMB \equiv \sphericalangle CME$ (unghi comun); $\sphericalangle BDM \equiv \sphericalangle ECM$ (U.U) $\Rightarrow \triangle MCE \sim \triangle MDB \Rightarrow \frac{CE}{BD} = \frac{CM}{12+EM} = \frac{EM}{BM} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CM}{12+EM} = \frac{EM}{CM+6}$. Avem $\left. \begin{array}{l} 2CM = 12 + EM \\ CM + 6 = 2EM \end{array} \right\} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4 \cdot EM - 12 = 12 + EM \Rightarrow EM = 8$ și $CM = 10 \Rightarrow P_{\triangle CME} = CE + EM + CM = 3 + 8 + 10 = 21 \text{ cm}$.

2. „ \Rightarrow ” Dacă $[AD]$ mediană, vom demonstra că are loc relația: $AO \cdot EC = 2 \cdot AE \cdot OD$. Fie $DF \parallel BE$, și cum $[BD] \equiv [CD]$ rezultă cu reciproca teoremei liniei mijlocii, DF linie mijlocie $\Rightarrow EF = FC = \frac{CE}{2}$. În



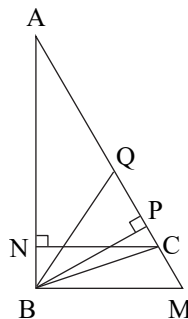
$\triangle ADF$, $OE \parallel DF \xRightarrow{T.Th} \frac{AO}{OD} = \frac{AE}{EF} \Rightarrow \frac{AO}{OD} = \frac{AE}{\frac{CE}{2}} \Rightarrow AO \cdot CE =$

$= 2 \cdot AE \cdot OD$.

„ \Leftarrow ” Dacă $AO \cdot CE = 2 \cdot AE \cdot OD$, atunci $[BD] \equiv [CD] \Leftrightarrow \frac{AO}{OD} = \frac{AE}{\frac{CE}{2}}$, (1) și $\frac{AO}{OD} = \frac{AE}{EF} \Rightarrow$

$\Rightarrow EF = \frac{CE}{2} = CF$. În $\triangle BEC$, $FD \parallel BE$ și $[EF] \equiv [FC]$ rezultă cu reciproca teoremei liniei mijlocii, FD linie mijlocie $\Rightarrow [BD] \equiv [DC] \Rightarrow [AD]$ mediană.

4. a) Fie $BP \perp AM$ și $Q \in [AC]$ astfel încât $[AQ] \equiv [QM]$. În $\triangle BCN$ și $\triangle CBP$ avem: $\sphericalangle BNC \equiv \sphericalangle CPB$ (1 dr); $[BC] \equiv [CB]$; $\sphericalangle NBC \equiv \sphericalangle PCB$ (din ipoteză) $\Rightarrow \triangle BCN \equiv \triangle CBP \Rightarrow BP = CN = 3 \text{ cm}$. În $\triangle ABM$, $m(\sphericalangle B) = 90^\circ$, $[BQ]$ mediană $\xRightarrow{T.mediane} BQ = AQ = QM = \frac{AM}{2}$. $\triangle ABQ$ isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle ABQ) = m(\sphericalangle BAQ) = 15^\circ$; $m(\sphericalangle BQP) = m(\sphericalangle BAQ) + m(\sphericalangle ABQ) = 30^\circ$ (teorema unghiului exterior triunghiului $\triangle ABQ$). În $\triangle BPQ$, $m(\sphericalangle P) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle Q) = 30^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle QBP) = 60^\circ$. Deci $m(\sphericalangle (BP, BQ)) = 60^\circ$;

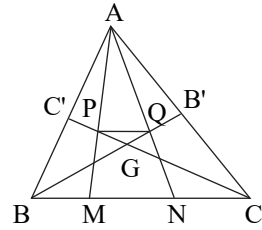


b) În $\triangle BPQ$, $m(\sphericalangle P) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle Q) = 30^\circ \xRightarrow{T.30^\circ} BQ = 2 \cdot BP = 6 \text{ cm}$ și în $\triangle ABM$, $AM = 2 \cdot BQ =$

$$= 12 \text{ cm}; BP = \frac{BQ}{2} = \frac{\frac{AM}{2}}{2} = \frac{AM}{4} \Rightarrow BP = \frac{1}{4} \cdot AM; \text{ c) } A_{ABM} = \frac{AM \cdot BP}{2} = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18 \text{ cm}^2.$$

4. a) $[BB']$ și $[CC']$ mediane, $BB' \cap CC' = \{G\}$; $\frac{PA}{PM} = \frac{3}{2}$ și $\frac{QA}{QN} = \frac{3}{2}$

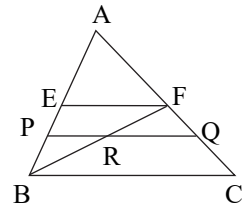
$$= \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{PA}{PM} = \frac{QA}{QN} \stackrel{\text{R.T.Th}}{\Rightarrow} PQ \parallel MN, \text{ dar } [MN] \subset [BC] \Rightarrow PQ \parallel BC.$$



b) În ΔAMN , $PQ \parallel MN \stackrel{\text{T.F.A}}{\Rightarrow} \Delta APQ \sim \Delta AMN \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{AQ}{AN} = \frac{PQ}{MN}$.

Dar $\frac{PA}{PM} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{PA}{PA+PM} = \frac{3}{2+3} \Rightarrow \frac{PA}{AM} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{PQ}{MN} = \frac{3}{5}$, dar $MN = \frac{BC}{3}$

$$PQ = \frac{3}{5} \cdot MN = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot BC \Rightarrow 5 \cdot PQ = BC.$$



5. $[AF] \equiv [FC]$. Fie $FE \parallel BC$ rezultă cu reciproca teoremei liniei mijlocii $[EF]$ linie mijlocie $\Rightarrow EF = \frac{BC}{2}$, (1). Din $EF \parallel BC$ și $PQ \parallel BC \Rightarrow EF \parallel PQ \stackrel{\text{T.F.A}}{\Rightarrow} \Delta BEF \sim \Delta BPR \Rightarrow \frac{PR}{EF} = \frac{BR}{BF} = \frac{BP}{BE}$, (1). În ΔBCF , $RQ \parallel BC \stackrel{\text{T.F.A}}{\Rightarrow} \Delta FQR \sim \Delta FCB \Rightarrow \frac{FR}{FB} = \frac{RQ}{BC} = \frac{FQ}{FC}$;

$$\frac{FB-FR}{FB} = \frac{BC-RQ}{BC} \Rightarrow \frac{BR}{FB} = \frac{BC-RQ}{BC}, \text{ (2). Din (1) și (2) } \Rightarrow \frac{PR}{EF} = \frac{BC-RQ}{BC} \Rightarrow BC \cdot RP = \frac{BC}{2} \cdot (BC-RQ);$$

$$2 \cdot BC \cdot RP = BC^2 - BC \cdot RQ \Rightarrow BC \cdot RP + BC \cdot RP + BC \cdot RQ = BC^2 \Rightarrow BC(RP + PQ) = BC^2 \Rightarrow RP + PQ = BC \text{ (constantă).}$$

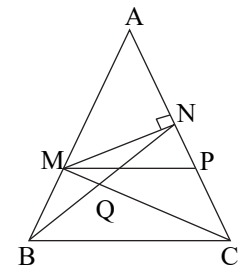
6. a) Fie $MP \parallel BC$, $P \in [AC] \stackrel{\text{T.F.A}}{\Rightarrow} \Delta AMP \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$.

Notăm $AB = 3a$, $MA = 2a \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AP = \frac{2 \cdot 3a}{3} = 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow [AM] \equiv [AP]$ și $m(\sphericalangle MAP) = 60^\circ \Rightarrow \Delta AMP$ echilateral, unde $[MN]$ mediană $\Rightarrow MN$ înălțime $\Rightarrow MN \perp AC$;

b) În ΔABN și ΔBCM avem: $\sphericalangle BAN \equiv \sphericalangle CBM$ (60°); $[BM] \equiv [AN]$ ($BM = AN = a$); $[AB] \equiv [BC]$ (din ipoteză) $\stackrel{\text{L.U.L}}{\Rightarrow} \Delta ABN \equiv \Delta BCM$.

Avem $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle BCM$, $\sphericalangle ANB \equiv \sphericalangle BMC \Rightarrow m(\sphericalangle BMQ) + m(\sphericalangle MBQ) = 120^\circ$. Unghiul $\sphericalangle BQC$ exterior ΔBMQ , rezultă cu teorema unghiului exterior $m(\sphericalangle BQC) = m(\sphericalangle BMQ) + m(\sphericalangle MBQ) = 120^\circ$.



7. a) $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NB} = k$, $k \in \mathbb{Q}_+$; avem două cazuri: 1) $k < 1$ și 2) $k > 1$.

Dacă $k < 1 \Rightarrow B-M-N-C$ este ordinea punctelor pe dreapta BC și $k > 1 \Rightarrow B-N-M-C$ ordinea punctelor pe dreapta BC. Avem $BM = MC \cdot k \Rightarrow BC = MC \cdot (k+1)$ și $NC = NB \cdot k \Rightarrow BC = NB \cdot (k+1) \Rightarrow$

